# *Het thermisch stemmen van een gitaar*

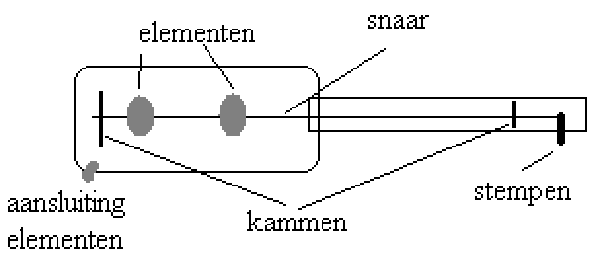
*In dit experiment wordt bestudeerd hoe snaarinstrumenten beïnvloed kunnen worden door warmte. Door gebruik te maken van elektriciteit is het mogelijk om instrumenten zoals een gitaar of een piano te stemmen. Dit zou veel sneller gaan dan de gebruikelijke manier om de spankracht van een snaar te veranderen. Hoe stroom en warmte de trilfrequentie van een snaar kunnen beïnvloeden, en daarmee de toonhoogte, is in dit verslag te lezen.*

Door: Jiri Tik Djiang Oen
5814685
Natuurkunde Practicum 1
Februari 2008-02-04

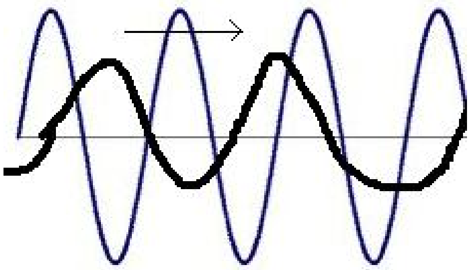
**Theorie**
In de praktijk heeft ieder materiaal een weerstand. Als door dat materiaal een stroom loopt wordt het materiaal warmer. Ook is het bekend dat een materiaal in de meeste gevallen uitzet wanneer het warmer wordt. Dit is de basis voor ons experiment.

Het is niet ingewikkeld. We hebben een gitaar die in eerste instantie te hoog gestemd is. Wanneer er een stroom door heen loopt, zal de snaar warmer worden. Hierdoor zet de snaar uit. Doordat de snaar op vaste punten is 'opgehangen' wordt het trillende deel van de snaar niet langer, maar de snaar wordt slapper. Hierdoor gaat de frequentie trilling omlaag en wordt de toon lager. Door een juiste stroom er door heen te laten lopen kan de snaar precies gestemd worden op de juiste frequentie, zonder gebruik te maken van de gebruikelijke stemmethode.

**Meetmethode en Opstelling**
Er wordt gebruik gemaakt van een elektrische gitaar met snaren van staal. De gitaar heeft 6 snaren maar er wordt voor de proef maar één snaar gebruikt. Berekeningen die toegepast worden kunnen ook toegepast worden op de twee andere snaren, omdat deze van het zelfde materiaal zijn. De drie dikste snaren zijn ook van staal maar nog omwonden met en ander materiaal, waardoor de berekeningen niet toepasbaar zijn.
De gitaar bevat twee magnetodynamische elementen die de trillingen van de snaar kunnen registreren. Je kunt ze ook andersom gebruiken zodat de snaar in trilling wordt gezet door het element. De gitaar in eerste instantie gestemd door de spankracht van de snaar te veranderen doormidden van het draaien aan de stempen. De snaar ligt op twee kammen, zodat hij verder vrij is om te trillen.
Hier onder is een plaatje van een gitaar. Voor het gemak is er maar één snaar getekend.




Voor het meten kan beginnen moet de snaar gestemd worden. Het gaat om de g snaar die een frequentie heeft van 196Hz. Als eerste kan dit getracht worden op gehoor. Op Internet zijn geluidssamples te vinden van de klank van deze snaar. Door te draaien aan de stempen wordt dan geprobeerd de klank van de snaar het zelfde te laten zijn als die van de sample. Om de snaar nog preciezer te stemmen wordt gebruik gemaakt van een functiegenerator en een oscilloscoop. Wanneer een van de elementen van de gitaar op de oscilloscoop aangesloten wordt is het mogelijk de trilling van de snaar visueel te analyseren. Er kan dan onderscheid gemaakt worden tussen verschillende frequenties en amplitudes. Ook wordt de functiegenerator aangesloten op de scoop. We stellen de functiegenerator in op de frequentie die de snaar moet hebben: 196Hz, en vervolgens triggeren we de oscilloscoop op het signaal van de functiegenerator. Hierdoor staat de golffunctie van de generator stil en beweegt het signaal van de snaar. Door weer met de stempen te draaien is het mogelijk beide signalen stil te laten staan. Wanneer dat zo is, zijn de frequenties gelijk, en is de snaar dus gestemd op 196Hz. Ook kan je gebruik maken van Lissajous figuren. De scoop kan op een XY functie gezet worden, ipv op X(t) en Y(t). De amplitude van een signaal wordt dan uitgezet op de x-as terwijl de amplitude van het andere signaal op de y-as wordt uitgezet. Als het plaatje een mooi rondje is, zijn de frequenties gelijk.



*Links een illustratie van een mogelijke situatie op het scherm van de oscilloscoop. Het signaal van de functiegenerator staat stil, en het (dikkere en) minder zuivere signaal van de gitaar loopt naar rechts toe totdat de gitaar juist gestemd is.*

Voor de experimenten is het handig, als de snaar niet telkens opnieuw aangeslagen moet worden. Het is het prettigst als de snaar continu door blijft trillen. Dit is mogelijk door de gitaar rond te laten zingen door het signaal van een van de elementen(deze noemen we element A) terug te koppelen door een versterker naar element B die vervolgens de snaar weer in trilling brengt(houdt). In het onderstaande schema zie je de schakeling:

De snaar wordt verbonden aan een regelbare elektriciteitsbron met tweedraden en klemmetjes. Hiermee kunnen we een stroom laten lopen door de snaar waardoor de temperatuur van de snaar zal stijgen.

**Resultaten**

We hebben drie formules:

**(1)** $\Delta l/l = \alpha\Delta T$

**(2)** $f^2 = F/(l^2\, d^2\, \pi\, \rho)$

**(3)** $\Delta F/A = -\, E\, \Delta l/l$

Hier is $l$ de lengte van de snaar tussen de twee kammen(het trillende gedeelte), $\Delta l$ de verandering van lengte als gevolg van de verandering in temperatuur en $\alpha$ is een uitzettingscoëfficiënt die in dit geval $1.2 * 10^{-5}$/C is. Verder is f de frequentie, F de spankracht van de snaar, d de diameter van de snaar, A het oppervlak van de snaardoorsnede, en E is een constante van $2.2*10^{11}$ N/m². $\rho$ is de dichtheid van het materiaal en die is voor staal $7850 kg/m^3$.

Uit deze formules is te zien dat je te maken krijgt met veranderingen in lengte van de snaar, maar omdat de afstand tussen de kammen gelijk blijft, blijft ook de lengte van het trillende deel van de snaar gelijk. De formules moeten we dus eerst omschrijfen in iets bruikbaars voordat we gaan invullen.

$$A = \pi r^2 = \pi (½ d)^2 = \pi ¼ d^2$$

$$4A = \pi d^2$$

Dit gaan we invullen in formule 2 zodat we krijgen:

$$f^2 = F/(l^2\, 4A\, \rho)$$

Een nieuwe spankracht $F_2$ is de oude $F_1$ plus de verandering $\Delta F$.

$$F_2 = F_1 + \Delta F$$

Uit formule 3 kunnen we $\Delta F$ afleiden. Dus:

$$F_2 = F_1 - A\, E\, \alpha\, \Delta T$$

Nu hebben we alles om de laatste formule te creëren:

$$f_2^2\, l^2\, 4A\rho = f_1^2\, l^2 4A\rho - A\, E\, \alpha\, \Delta T$$

We maken hem netjes als we door 4A delen:

**!** $$f_2^2\, l^2\, \rho = f_1^2\, l^2\, \rho - ¼\, E\, \alpha\, \Delta T$$

Het is nu mogelijk om frequenties te berekenen als gevolg van een temperatuursverandering. Een voorbeeld:
De frequentie van de hoge e snaar op een gitaar een 330Hz. Wat is de nieuwe frequentie als de temperatuur van kamertemperatuur(293K) tot 313K verhoogd wordt in de snaar.
$f_1$ = 330Hz, $\Delta T$ = 20K en de lengte van de snaar is 0,66 meter. De rest van de gegevens staan al hier boven.

$$f_2^2\, l^2\, \rho = f_1^2\, l^2\, \rho - \tfrac{1}{4}\, E\, \alpha\, \Delta T$$
$$f_2^2 * 0{,}66^2 * 7850 = f_1^2 * 0{,}66^2 * 7850 - \tfrac{1}{4}\, 2{,}2*10^{11} * 1{,}2*10^{-5}\, \Delta T$$
$$f_2^2 * 3419{,}5 = 372383550 - 13200000$$
$$f_2^2 = 107039{,}8$$
$$f_2 = 324 \text{ Hz}$$

De nieuwe frequentie is dus 324Hz.

Boven is het schema gegeven van de schakeling van de versterker, met filter door terugkoppeling. Het is belangrijk om de juiste weerstanden en condensator te kiezen. De versterking moet 100x zijn. Je kan dan bijvoorbeeld R1 1kΩ kiezen met daarbij R2 100kΩ. De waarde van de condensator is belangrijk voor de eigenschap van de filter. De afsnijfrequentie moet zo gekozen worden dat de grondtoon doorgelaten wordt, en de boventonen weg gefilterd worden. Voor dit experiment wordt de g snaar gebruikt met een frequentie van 196Hz. Een goede afsnijfrequentie zou dan kunnen zijn 250Hz. Een boventoon is namelijk een veelvoud van de grondtoon. De eerste boventoon van 196Hz ligt dus ver boven de door ons gekozen afsnijfrequentie. De formule voor de afsnijfrequentie luidt:

$$\text{Afsnijfrequentie} = 1/(2\pi\, R\, C)$$

Hierboven is al genoemd dat onze gekozen weerstand R 100kΩ is. Om C te krijgen gaan we de formule invullen.

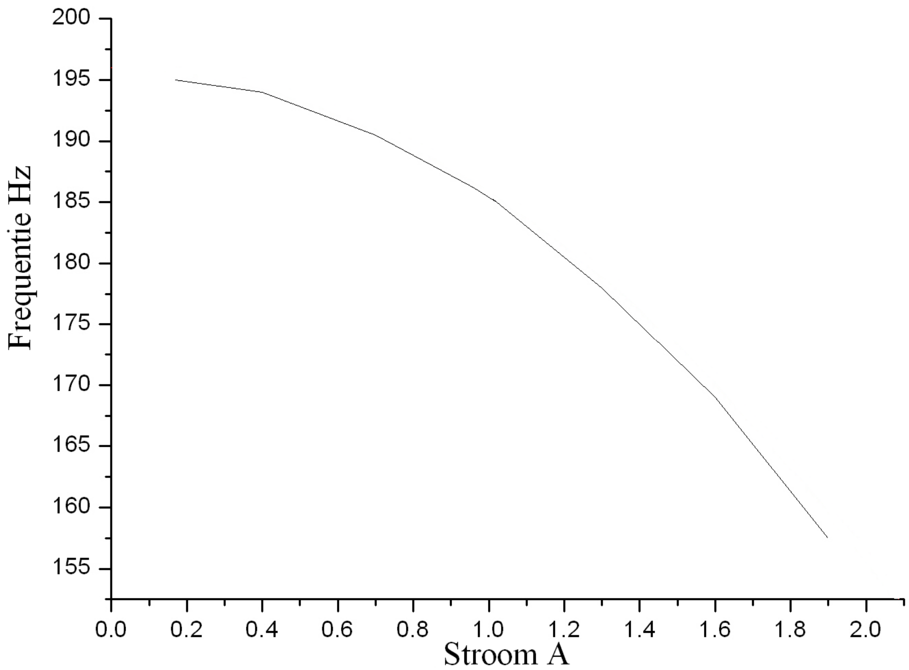
$$250 = 1/(2\pi\ 100000\ C)$$
$$1/250 = 200000\pi\ C$$
$$1/(250*200000\pi) = 6{,}4*10^{-9} = C$$

Omdat condensators van 6,4nF niet tot onze beschikking zijn nemen we een condensator van 6,8nF.

Er wordt een stroombron gemaakt en stroom door de snaar laten lopen van 0 tot 2 Ampère. Zoals te verwachten neemt te frequentie af als gevolg van een hogere stroom met daarbij een hogere temperatuur van de snaar.

| **Stroom** | **Frequentie** |
|---|---|
| 0,40 | 194 |
| 0,70 | 190,5 |
| 1,00 | 186 |
| 1,30 | 178 |
| 1,60 | 169 |
| 1,90 | 157,5 |

| | |
|---|---|
| 2,00 | 154 |




De frequentie lijkt kwadratisch met de stroom af te nemen.

De snaar is gestemd op 196Hz, dus wanneer er 0Ampère doorheen loopt blijft de frequentie 196Hz. Bij 1A is de frequentie 186Hz. Dit is dus 10Hz lager. Een meting over de snaar geeft dat de spanning hierover 1,05 Volt is.

$$P=UI$$
$$P=1,05*1,00$$
$$P=1,1\text{Watt}$$

Dit is het gedisdipeerde vermogen in de snaar bij deze stroomsterkte. Dissipatie is de warmteontwikkeling in een systeem. Het gedissipeerde vermogen is het vermogen wat hierbij opgewekt is. Deze dissipatie, die in de meeste gevallen zo klein mogelijk gehouden wordt, is in deze proef de basis van het experiment.

Een nieuwe formule wordt geïntroduceerd. Deze kan gebruikt worden voor het berekenen van de soortelijke warmte van het materiaal waar de snaar gemaakt van is.

$$\Delta T(t) = \Delta T(0)\, e^{-P\, t/\, (C\, \Delta T(0))}$$

Voordat iets gezegd kan worden over deze formule moet iets gezegd worden over de handelingen in het experiment die betrekking hebben op deze formule. Wanneer er 0A door de snaar loopt is de frequentie 196Hz en de temperatuur 293K. Bij 1A is de frequentie 186Hz en de temperatuur nog onbekend. Deze kan berekend worden uit de formule enkele pagina’s terug. Deze zullen we zodirect gebruiken.
Wanneer de stroombron weer uitgezet word, zal de frequentie weer stijgen naar de 196Hz. Dit zal niet direct gebeuren, doordat het materiaal tijd nodig heeft om af te koelen. Deze tijd is belangrijk voor het berekenen van de soortelijke warmte. De tijd die

nodig is om tot 1/3 terug naar de oude frequentie te gaan heet de relaxatie tijd. De frequentie gaat van 186Hz naar 196Hz. Één derde van dit verschil is dus 3,3Hz. De relaxatietijd is dus de tijd die nodig is om van 186Hz, naar 189Hz te komen. Deze tijd is gemeten op 4,1 seconde.
Om weer even terug te komen op deze formule:

$$\Delta T(t) = \Delta T(0)\ e^{-P\ t\ /\ (C\ \Delta T(0))}$$

De $\Delta T(t)$ staat voor de temperatuursverandering ten opzichte van de kamertemperatuur(293K), op $t$ = 4,1(relaxatietijd). De $\Delta T(0)$ is de temperatuursverandering tenopzichte van de kamertemperatuur op t = 0. Dit is wanneer er 1A loopt door de snaar. De P staat voor het koelvermogen, wat gelijk is aan het stookvermogen. C is de warmtecapaciteit van de snaar die berekend kan worden met C= c/M waarbij c de soortelijke warmte(die wij uiteindelijk willen weten) is en M de massa van de snaar.
Om te beginnen moeten we de temperatuursveranderingen berekenen uit de frequentie met de formule van paar pagina's terug.

$$f_2^2\ l^2\ \rho = f_1^2\ l^2\ \rho - ¼\ E\ \alpha\ \Delta T$$
$$186^2 * 0{,}66^2 * 7850 = 196^2 * 0{,}66^2 * 7850 - ¼\ 2{,}2*10^{11} * 1{,}2*10^{-5}\ \Delta T$$
$$118299638 = 131361975 - 660000\ \Delta T$$
$$660000\ \Delta T = 13062337$$
$$\Delta T = 19{,}8K$$

De $\Delta T(0)$ = 19,8K. En nu de $\Delta T(t)$.

$$f_2^2\ l^2\ \rho = f_1^2\ l^2\ \rho - ¼\ E\ \alpha\ \Delta T$$
$$189^2 * 0{,}66^2 * 7850 = 196^2 * 0{,}66^2 * 7850 - ¼\ 2{,}2*10^{11} * 1{,}2*10^{-5}\ \Delta T$$
$$122146531 = 131361975 - 660000\ \Delta T$$
$$660000\ \Delta T = 9215444$$
$$\Delta T = 14{,}0K$$

De $\Delta T(t)$ blijkt hieruit 14,0K. Nu gaan we invullen:

$$\Delta T(t) = \Delta T(0)\ e^{-P\ t\ /\ (C\ \Delta T(0))}$$
$$14{,}0 = 19{,}8\ e^{-1{,}1\ *\ 4{,}1\ /\ (C\ 19{,}8)}$$
$$0{,}707 = e^{-1{,}1\ *\ 4{,}1\ /\ (C\ 19{,}8)}$$
$$\ln 0{,}707 = -1{,}1*4{,}1/(C * 19{,}8)$$
$$0{,}347 = 4{,}51/(19{,}8\ C)$$
$$10{,}33 = 19{,}8\ C$$
$$C = 0{,}522 \text{ Joule/Kelvin}$$

De warmtecapaciteit is bekend. Hieruit kunnen we dan de soortelijke warmte berekenen, als we de massa M kennen. Deze wordt berekend door de inhoud V te vermenigvuldigen met de dichtheid $\rho$. De inhoud is:

$$V = \pi\ \rho^2\ l$$

De diameter van de snaar is gemeten met een micrometer op 0,43mm.

$$V = \pi\ (2{,}15*10^{-4})^2 * 0{,}66$$
$$V = 9{,}58*10^{-8}\ m^3$$

$$M = V * \rho$$
$$M = 9,58*10^{-8} * 7850$$
$$M = 7,5*10^{-4}\ Kg$$

$$c = C / M$$
$$c = 0,522 / 7,5*10^{-4}$$
$$c = 696$$

De soortelijke warmte is 696 Joule/gram/Kelvin. Op Internet echter is de waarde die we vinden 510 Joule/gram/Kelvin. Ons resultaat zit er dus ongeveer 36% naast, en dat is acceptabel.

Een stukje terug heb ik al uitgelegd hoe het rondzingen van een toon in zijn werking gaan. Even een korte herhaling: De snaar van de gitaar trilt. Dit wordt door het element opgevangen en omgezet in een signaal, dat vervolgens versterkt wordt. Dit versterkte signaal gaat terug naar de gitaar naar het tweede element. Dit element gaat trillen met de zelfde frequentie als de snaar zelf. Het signaal is immers alleen versterkt, en de frequentie is behouden. De snaar resoneert dan met het element, en gaat trillen. Deze resonantie is erg belangrijk. Resonantie treedt alleen op als de frequentie van de bron min of meer gelijk is aan de eigenfrequentie van de snaar. Bij de g snaar moet dit dus rond de 196Hz zijn.